Pascal ORTIZ

Sommes

Éléments de cours, 61 exercices

Version du 1er octobre 2018

Table des matières

1 Présentation

Découverte de la notion de somme

Σ est une lettre grecque majuscule, équivalente à notre S. Le symbole Σ est une notation utilisée pour désigner des *sommes* mathématiques.
Soit la quantité suivante

$$S = \sum_{i=4}^{8} (10i + 2)$$

Alors, cette notation doit se comprendre de la manière suivante : S vaut la *somme* de tous les nombres de la forme

$$10i + 2$$

lorsque l'indice i prend toute les valeurs entières entre 4 et 8, ces deux valeurs étant incluses.
Le calcul donne que $S = 310$. Le tableau suivant montre comment calculer S :

i	4	5	6	7	8
$10i + 2$	42	52	62	72	82
Somme	42	94	156	228	310

Définition formelle d'une somme

Soit une suite $(x_k)_k$ de nombres réels ou complexes définie entre deux indices fixés i et j tels que $i \leq j$.
Alors, par définition,

$$\sum_{k=i}^{j} x_k = x_i + x_{i+1} + x_{i+2} + \cdots + x_j$$

Variante de notation :

$$\sum_{i \leq k \leq j} x_k = x_i + x_{i+1} + \cdots + x_j$$

et plus généralement, si on a p indices deux à deux distincts $i_1, i_2, \ldots, i_p$ dans $\{i, \ldots, j\}$ et si on pose $K = \{i_1, i_2, \ldots, i_p\}$ alors on peut définir

$$S = \sum_{k \in K} x_k = x_{i_1} + x_{i_2} + \cdots + x_{i_p}$$

et si K est vide, on convient que $S = 0$.

Remarque. J'éviterai de définir une somme $S = \displaystyle\sum_{k=j}^{i} x_k$ où on aurait $i < j$ car ce serait ambigu à cause de deux interprétations incompatibles suivantes :

— une somme ne dépendant pas de l'ordre des termes, on aurait $S = \sum_{k=i}^{j} x_k$

— les indices de la somme parcourraient l'ensemble $\{k \ ; \ j \leq k \leq i\}$ qui est l'ensemble vide et donc $S = 0$

Indice muet

La somme

$$S = \sum_{k=1}^{10} (2k - 1)$$

est une constante qui NE dépend PAS de k. La lettre k sert juste à exprimer la quantité variable lorsque l'on somme. D'ailleurs, la somme vaut 100 :

$$S = 1 + 3 + 5 + \cdots + 19 = 100$$

et donc elle ne dépend pas de k.

On dit que k est une *lettre muette* ou une *variable muette* et on peut remplacer k par n'importe quelle lettre non déjà utilisée, par exemple ici j :

$$\sum_{k=1}^{10} k = \sum_{j=1}^{10} j$$

En revanche, si $n \geq 0$ est un entier donné, la somme

$$\sum_{k=1}^{n} k = 1 + 2 + \cdots + n$$

dépend de la valeur de n puisqu'on obtient des valeurs différentes selon que n vaut par exemple 2 ou 5. Donc on peut noter cette somme S_n.

Si au cours d'un calcul, vous vous retrouvez avec une somme qui dépend d'un indice de sommation, c'est que vous avez fait une erreur quelque part. Par exemple, si vous arrivez à

$$\sum_{n=1}^{p} n = \frac{n(n+1)}{2}$$

votre résultat est absurde puisque votre réponse dépend de n qui est l'indice de la somme (et qui n'a pas d'autre existence en dehors de permettre le calcul de la somme).

Déployer une somme

Quand je parlerai de *déployer une somme* cela signifiera qu'on récrit une somme initialement présentée avec le symbole sigma $\sum_{k=1}^{n} x_k$ sous sa forme sans sigma

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n$$

Lorsque

- les techniques de transformations de sommes ne sont pas bien comprises,
- le formalisme devient inutilement compliqué,

il est plus simple ou plus productif de revenir à la définition d'une somme avec des points de suspension.

La somme $1+2+3+\cdots+n$

Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. On peut considérer la somme

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} k = 1+2+3+\cdots+n$$

Il s'agit donc de la somme des n premiers entiers strictement positifs. A priori, il n'est pas acquis que S_n puisse se simplifier en une formule simple. Pourtant, on peut réduire S_n avec la formule suivante :

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} = \frac{n(n+1)}{2}}$$

Cette formule peut s'établir de nombreuses façons. Elle a contribué à la légende du mathématicien Gauss qui aurait découvert et appliqué cette formule au cas $n = 100$ alors qu'il était encore à l'école primaire, comme c'est raconté dans sa biographie.

On peut en établir la preuve par récurrence sur n mais cette preuve n'explique pas l'origine de la formule.

Une autre façon de faire est la suivante :

$$\begin{array}{rcccccccccccc}
S_n & = & 1 & + & 2 & + & 3 & + & \ldots & + & (n-1) & + & n \\
S_n & = & n & + & (n-1) & + & (n-2) & + & \ldots & + & 2 & + & 1 \\
\hline
\\
2S_n & = & (n+1) & + & (n+1) & + & (n+1) & + & \ldots & + & (n+1) & + & (n+1) \\
2S_n & = & n(n+1) \\
S_n & = & \dfrac{n(n+1)}{2}
\end{array}$$

Commentaires

- On écrit S_n termes à termes, puis en-dessous, on écrit S_n termes à termes mais en commençant par la fin.
- On constate alors que la somme de deux termes l'un en-dessous de l'autre est constante et égale à $n+1$.
- Que la somme soit constante est justifiée par le fait que les termes dans la première somme augmentent de 1 tandis que dans la 2e somme, les termes diminuent de 1 d'où compensation quand on les additionne.
- Enfin, à l'avant-dernière ligne et à la précédente, la somme dans le membre de droite contient n termes, d'où la valeur $n(n+1)$.

Extensions de la définition

Dans les exemples précédents, les indices des termes sommés prennent toutes les valeurs entières entre deux bornes mais il est possible de restreindre la somme à des indices vérifiant une condition. Par exemple, la notation

$$\sum_{\substack{i=0 \\ i \text{ pair}}}^{5} (10 \times i + 2)$$

désigne la somme $2 + 22 + 42$ où l'indice ne prend que les valeurs paires entre 0 et 5, à savoir 0, 2 ou 4.

Autre exemple. La somme

$$S = \sum_{0 \leq 2k+1 \leq 10} k^2$$

est effectuée pour tous les indices k entiers tels que $0 \leq 2k + 1 \leq 10$ autrement dit pour $k = 0, \ldots, 4$ en sorte que $S = 0^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 = 0 + 1 + 4 + 9 + 16 = 30$.

Autre extension de la définition

En réalité, on peut sommer toute quantité un nombre fini de fois. Donc si on veut faire la somme S des quantités $10i + j$ pour tous les indices i et j tels que $1 \leq i \leq 3$ et $2 \leq j \leq 4$, on écrira

$$S = \sum_{\substack{1 \leq i \leq 3 \\ 2 \leq j \leq 4}} 10i + j$$

S vaut : $(12 + 13 + 14) + (22 + 23 + 24) + (32 + 33 + 34) = 207$

Dans le cas présent, tout revient à faire une somme de termes indexés par des couples $(i, j) \in \{1, 2, 3\} \times \{2, 3, 4\}$. Il serait facile de formaliser cette notion.

2 Sommes remarquables

Sommes des termes d'une suite géométrique

Il n'y qu'une seule version à retenir et à **bien** retenir :

$$\boxed{(\star) \quad 1 + x + x^2 + \cdots + x^N = \sum_{k=0}^{N} x^k = \begin{cases} \dfrac{x^{N+1} - 1}{x - 1} & \text{si } x \neq 1 \\ N + 1 & \text{sinon} \end{cases}}$$

Ici, N désigne un entier positif ou nul. La formule « générale » suppose que la raison x est différente de 1 (le dénominateur s'annulerait sinon).

Bien noter les points suivants :

— il y a **deux cas** selon que x vaut 1 ou pas ;

— le dénominateur qui s'annule si $x = 1$

— la quantité $N+1$ qui intervient dans les deux cas est le nombre de termes de la somme ;
— le premier terme à gauche est toujours 1.

De nombreuses situations se ramènent à $(\star)$. Par exemple, si

$$S=\sum_{k=3}^{13} x^k$$

et en supposant $x\neq 1$ alors S peut se récrire de l'une des deux façons suivantes :

— le plus simple, en factorisant $S=x^3\sum_{k=3}^{13} x^{k-3}=x^3\sum_{j=0}^{10} x^j=x^3\frac{x^{11}-1}{x-1}$
— en additionnant et retranchant : $S=B-A$ où $A=\sum_{k=0}^{13} x^k$ et $B=\sum_{k=0}^{2} x^k$ et A et B peuvent se calculer avec la formule $(\star)$.

Conséquence

En faisant le produit en croix dans la formule $(\star)$ et en posant $x=\frac{a}{b}$, on obtient la factorisation suivante, valable quels que soient a et b :

$$\boxed{a^n-b^n=(a-b)\sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k}}$$

Dans la somme, on remarquera que :

— le nombre de termes est l'exposant n
— la somme des exposants de a et de b sous le signe Σ vaut toujours $n-1$.

Cas particulier

En changeant b en $-b$ et en supposant $n=2m+1$ impair, on obtient l'identité suivante :

$$\boxed{a^{2m+1}+b^{2m+1}=(a+b)(a^{2m}-a^{2m-1}b+\cdots+b^m)}$$

Par exemple, $\boxed{a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)}$, résultat qu'un matheux doit connaître. Observer les points suivants :

— cette formule ne permet pas de factoriser des expression de la forme a^4+b^4 car l'exposant doit être impair ;
— entre les parenthèses du 2^e^ facteur de droite, les termes alternent de signe, en terminant par un plus.

La factorielle

Si n est un entier strictement positif, on appelle *factorielle* de n le nombre suivant :

$$1\times 2\times\cdots\times n.$$

La factorielle de n se note $n!$. C'est donc le produit de tous les entiers entre 1 et n.

La factorielle vérifie la propriété suivante :

$$(\star) \quad (n+1)! = n! \times (n+1)$$

valable pour tout entier $n > 0$.

Voici les 5 premières factorielles :

$$\begin{array}{rcl} 1! & = & 1 \\ 2! & = & 2 \\ 3! & = & 2 \times 3 = 6 \\ 4! & = & 6 \times 4 = 24 \\ 5! & = & 24 \times 5 = 120 \end{array}$$

La factorielle de n grandit très vite, asymptotiquement plus vite que n'importe quelle exponentielle de n (c'est-à-dire, du type a^n).

On souhaite pouvoir donner une valeur à la factorielle de 0. Pour cela, on s'arrange pour que la relation $(\star)$ soit encore vraie pour $n = 0$, ce qui donne :

$$1! = 1 \times 0!$$

ce qui impose $\boxed{0! = 1}$.

On peut démontrer que le nombre $n!$ admet une interprétation combinatoire : c'est le nombre de permutations de n objets, autrement dit le nombre d'alignements possibles dans n emplacements de n objets. Par exemple, voici les 6 façons d'aligner trois objets nommés A, B et C :

$$\begin{array}{ccc} A & B & C \\ A & C & B \\ B & A & C \\ B & C & A \\ C & A & B \\ C & B & A \end{array}$$

Preuve par récurrence

Montrons l'assertion par récurrence sur n.

Si $n = 1$ il y a bien un seul rangement possible de 1 objet.

Fixons $n \geq 1$ et supposons que le nombre de permutations de n objets soit $n!$. Donnons-nous un alignement de $n+1$ cases, numérotées 1, 2, etc. n et $n+1$ et donnons-nous $n+1$ objets distincts $X_1, X_2, \ldots, X_n, X_{n+1}$ à placer dans les cases. Pour bien distinguer, notons X l'objet X_{n+1}.

Toute permutation de $n+1$ objets placera forcément X dans l'une des $n+1$ cases. Cette case étant connue, disons la case numéro k, on obtiendra toutes les permutations des $n+1$ objets telles que X soit dans la case k en plaçant les n objets autres que X dans les n cases restantes. Le placement de n objets dans n cases peut se faire, d'après l'hypothèse de récurrence, de $n!$ façons. Il y a $n+1$ possibilités de placement de l'objet X (soit à la case numéro $k = 1$, soit à la case numéro $k = 2$, etc soit à la case numéro $k = n+1$), et il y a $n!$ placements par cas, donc, on obtient un nombre total de permutations valant $(n+1) \times n! = (n+1)!$ ce qui termine l'hérédité et achève la récurrence.

Le coefficient binomial

Si p et n sont des entiers tels que

$$0 \leq p \leq n$$

alors on appelle *coefficient binomial* $\binom{n}{p}$ le nombre suivant :

$$(1) \quad \boxed{\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}}$$

Ce nombre est lu « p parmi n ». Comme moyen mnémotechnique, on observera qu'au dénominateur, on a $p + (n - p) = n$.

Il se trouve que $\binom{n}{p}$ est un nombre entier mais cela n'a rien d'évident a priori.

La formule ci-dessus n'est pas adapté au calcul. En effet, $n!$ peut être un nombre très grand. Ainsi, calculons par exemple $\binom{11}{4}$:

$$\binom{11}{4} = \frac{11!}{4!7!} = \frac{39916800}{24 \times 5040} = 330$$

Cherchons une formule plus appropriée. Dans (1), on peut simplifier $n!$ par $(n-p)!$. Une fois simplifié, il reste le produit des $n - (n - p) = p$ entiers en décroissant à partir de n, autrement dit les entiers $n - k$ avec k variant de 0 à $p - 1$:

$$n - 0, n - 1, \dots, n - (p-2), n - (p-1)$$

Comme $n - (p - 1) = n - p + 1$, on obtient la jolie formule suivante :

$$\binom{n}{p} = \frac{n(n-1)\dots(n-p+1)}{p!}$$

ou encore

$$\boxed{(2) \quad \binom{n}{p} = \frac{n(n-1) \times \cdots \times (n-p+1)}{p(p-1) \times \cdots \times 1}}$$

Cette formule est particulièrement simple à retenir :

- la fraction commence comme le membre de gauche : n en haut et p en bas ;
- le numérateur comme le dénominateur sont le produit en décroissant de p entiers positifs.

Recalculons

$$\binom{11}{4} = \frac{11 \times 10 \times 9 \times 8}{4 \times 3 \times 2 \times 1} = 11 \times 10 \times 3 = 330$$

on voit que le calcul est beaucoup plus léger.

En particulier, de la formule (2), en isolant n et p, on obtient la formule suivante :

$$\boxed{(3) \quad \binom{n}{p} = \frac{n}{p}\binom{n-1}{p-1}}$$

valable si $1 \leq p \leq n$.

Symétrie

La formule (1) montre que $\boxed{\binom{n}{n-p} = \binom{n}{p}}$

puisque

$$\binom{n}{n-p} = \frac{n!}{(n-p)!(n-(n-p))!} = \frac{n!}{(n-p)!p!} = \binom{n}{p}$$

Ainsi, $\binom{11}{7} = \binom{11}{4} = 330$.

Valeurs remarquables

Si $p = 0$ alors (1) donne :

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{n!\,0!} = \frac{n!}{n!} = 1$$

Si $p = 1$ alors (2) donne :

$$\binom{n}{p} = \frac{n}{1} = n$$

Ainsi

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1, \quad \binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n.$$

Relation fondamentale

Nous avons calculé $\binom{11}{4} = 330$. Calculons $\binom{10}{4}$ et $\binom{10}{3}$:

$$\begin{aligned}\binom{10}{3} &= \frac{10 \times 9 \times 8}{3 \times 2 \times 1} = 10 \times 3 \times 4 = 120 \\ \binom{10}{4} &= \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7}{4 \times 3 \times 2 \times 1} = 10 \times 3 \times 7 = 210\end{aligned}$$

Comme $120 + 210 = 330$, on a $\binom{11}{4} = \binom{10}{3} + \binom{10}{4}$. Cette propriété est générale :

$$(4) \boxed{\binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} = \binom{n+1}{p+1}}$$

en supposant que $0 \leq p < n$. En effet, soit A le numérateur de $\binom{n}{p}$ dans (2) :

$$A = n(n-1) \times \cdots \times (n-p+1).$$

Alors

$$\begin{aligned}
\binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} &= \frac{A}{p!} + \frac{A \times (n-p)}{(p+1)!} \\
&= \frac{A \times (p+1) + A \times (n-p)}{(p+1)!} \\
&= \frac{A \times (n+1)}{(p+1)!} \\
&= \frac{(n+1)n \times \cdots \times (n-p+1)}{(p+1)!} \\
&= \binom{n+1}{p+1}
\end{aligned}$$

Propriété combinatoire

On peut démontrer que $\binom{n}{p}$ est le nombre de façons de choisir p objets parmi n objets distincts. Par exemple, les façons de choisir 3 objets parmi 5 objets A, B, C, D et E sont les 10 suivantes :

$$\begin{array}{ccc|ccc}
A & B & C & A & D & E \\
A & B & D & B & C & D \\
A & B & E & B & C & E \\
A & C & D & B & D & E \\
A & C & E & C & D & E
\end{array}$$

et, on a bien $\binom{5}{3} = \dfrac{5 \times 4 \times 3}{3 \times 2 \times 1} = 10$.

Définition si $p > n$

On définit $\binom{n}{p} = 0$ si $p > n$. Ce choix est cohérent avec la définition combinatoire de p parmi n. Cette définition ne modifie pas la relation fondamentale qui est alors vraie pour tous n et p dans $\mathbb{N}$.

Un coefficient binomial est un entier

La relation fondamentale (4) montre, par récurrence sur n, que tout coefficient $\binom{n}{p}$ où p est arbitraire dans $\mathbb{N}$ est un entier (en bref : la somme de deux entiers est un entier).

La même relation justifie aussi, par récurrence sur n, que $\binom{n}{p}$ est le nombre de façons de choisir p objets parmi n.

Le triangle de Pascal

La relation fondamentale :

$$(1) \quad \binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} = \binom{n+1}{p+1}$$

permet de calculer les coefficients binomiaux de manière itérative. En effet si on connaît tous les coefficients $\binom{n}{p}$, on pourra connaître tous les coefficients $\binom{n}{p+1}$. En pratique, on place les coefficients dans un tableau avec les conventions suivantes :

- chaque ligne est indéxée par n, à partir de $n = 0$
- chaque colonne est indéxée par p, à partir de $p = 0$
- le coefficient $\binom{n}{p}$ est placé à la ligne d'indice n et la colonne d'indice p
- les coefficients binomiaux nuls (correspondant aux indices $p > n$ sont ignorés (ou sous-entendus)

En appliquant (1), et en référençant tous les coefficients indexés jusqu'à la ligne d'indice 7, on obtient le tableau suivant :

$$\begin{array}{cccccccc}
1 \\
1 & 1 \\
1 & 2 & 1 \\
1 & 3 & 3 & 1 \\
1 & 4 & 6 & 4 & 1 \\
1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1 \\
1 & 6 & 15 & \boxed{20} & \boxed{15} & 6 & 1 \\
1 & 7 & 21 & 35 & \boxed{35} & 21 & 7 & 1
\end{array}$$

Les observations suivantes correspondent à des relations établies lors de l'introduction des coefficients binomiaux :

- chaque terme autre que celui qui est dans le colonne de gauche est la somme de celui qui est juste au-dessus et juste au-dessus à gauche. Par exemple $35 = 15 + 20$.
- chaque ligne est symétrique
- chaque commence par 1
- la ligne d'indice n commence par 1, n.

Formule du binôme de Newton

Si n est un entier positif ou nul et a et b des nombres réels (ou complexes) alors

$$\boxed{\begin{aligned}(a+b)^n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k\end{aligned}}$$

Observer les points suivants :

— dans chacune des deux formules, la somme des exposants vaut n : $k + (n - k) = n$;
— les sommes comportent $n + 1$ termes ;
— la première somme fait porter l'exposant k sur le terme a et la seconde sur b ; selon les situations, vous choisirez une formule ou l'autre.

Pour calculer les coefficients binomiaux, soit on applique une des deux formules définissant le coefficient binomial, soit on utilise le tableau de Pascal.

Généralisation

La formule s'appelle la formule du binôme car on élève à la puissance une somme de *deux* termes. On peut généraliser la formule du binôme en élevant à la puissance n une somme de p termes :

$$\left(\sum_{k=1}^{p} a_k\right)^n$$

et on obtient une formule analogue mais plus complexe qui s'appelle la *formule multinomiale* comportant des coefficients dits *multinomiaux*.

Conséquences classiques de la formule du binôme

— Somme des coefficients binomiaux : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$

— Somme alternée des coefficients binomiaux : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0.$

Il existe différentes démonstrations de ces résultats, en particulier des démonstrations combinatoires. La formule du binôme $(a + b)^n$ donne la réponse aisément :

— pour la somme, faire $a = b = 1$
— pour la somme alternée, faire $a = 1$ et $b = -1$.

Plus précisément :

$$\begin{aligned} 2^n &= (1+1)^n \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^k 1^{n-k} \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \end{aligned}$$

et de même

$$\begin{aligned} 0 &= (1+(-1))^n \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k 1^{n-k} \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k \end{aligned}$$

Somme des puissances d'entiers consécutifs

Il s'agit de formules permettant le calcul de $1^p + 2^p + \cdots + n^p$. On s'intéresse uniquement aux cas $p = 1, 2, 3$, utiles en pratique.

$$S_1 = \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$
$$S_2 = \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$
$$S_3 = \sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

Ces sommes se découvrent assez facilement par une technique de télescopage par décalage d'indice.

Dans une optique de mémorisation, on observera que :

- la somme S_1 à la même valeur que si les n termes de la somme valaient tous la moyenne $m = \dfrac{n+1}{2}$ entre le dernier n et le premier 1 ;
- la somme S_3 est S_1^2 ;
- le numérateur de la somme S_2 commence comme S_1. Pour être sûr de la formule, remplacer n par 1 et on doit obtenir $1^2 = 1$.

3 Propriétés des sommes

Découpage d'une somme

Il est courant d'avoir à isoler certains termes d'une somme ou à regrouper des sommes de termes (« sommation par paquets »).

Le fait de pouvoir « découper » une somme signifie que si m, n, p sont des entiers tels que

$$n \leq m < p$$

alors

$$\sum_{k=n}^{p} x_k = \sum_{k=n}^{m} x_k + \sum_{k=m+1}^{p} x_k$$

ou, pour être un peu plus général, si I et J sont des ensembles finis et disjoints d'indices alors

$$\sum_{k \in I \cup J} x_k = \sum_{k \in I} x_k + \sum_{k \in J} x_k$$

[Remarquer que, comme une somme sur un ensemble vide d'indices est nulle, la formule ci-dessus s'applique aussi si un des ensembles I ou J est vide.]

Pour illustrer le découpage, isolons, par exemple, le premier et le dernier terme d'une somme :

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = x_1 + \sum_{i=2}^{n-1} x_i + x_n$$

De même, on peut séparer les termes d'indices impairs et le termes d'indices pairs :

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{1 \leq 2k+1 \leq n} x_{2k+1} + \sum_{1 \leq 2k \leq n} x_{2k}$$

Par un découpage pair/impair, on peut calculer la somme du type $1 - 2 + 3 - 4 + 5$ ou plus généralement

$$\sum_{k=1}^{2p+1} (-1)^k k$$

Somme d'une expression constante

On peut se demander ce que vaut la somme

$$S = \sum_{i=5}^{14} 42$$

Si on applique la définition, on a

$$S = 42 + 42 + \cdots + 42$$

et la somme contient $14 - 5 + 1 = 10$ termes donc $S = 420$.
Il semble curieux ici de ne pas avoir remplacé i dans une expression mais c'est ce que l'on fait si on écrit que $42 = 0 \times i + 42$ et donc

$$S = (0 \times 5 + 42) + (0 \times 1 + 42) + \cdots + (0 \times 14 + 42)$$

ce qui est bien la même quantité.
Plus formellement, si C est une constante et si I est un ensemble formé de N indices distincts, on a $\sum_{i \in I} C = N \times C$.

Nombre de termes dans une somme

Les éléments qu'on additionne quand on fait une somme s'appellent les *termes* de la somme. Dans la somme $\sum_{k=1}^{n} x_k$ le nombre de termes est clairement n.

Plus généralement, si i et j sont des indices tels que $i \leq j$ alors la somme $\sum_{k=i}^{j} x_k$ comporte $j - i + 1$ termes (attention au $+1$: un voyage en $n + 1$ étapes emprunte n routes).

Linéarité de la sommation

Il s'agit juste de traduire au moyen de Σ les propriétés immédiates suivantes :

$$(x_1 + y_1) + (x_2 + y_2) \cdots + (x_n + y_n) = (x_1 + \cdots + x_n) + (y_1 + \cdots + y_n)$$

$$a(x_1 + x_2 + \cdots + x_n) = ax_1 + ax_2 + \cdots + ax_n$$

ce qui donne

$$\sum_{i \in I} (ax_i + by_i) = a \sum_{i \in I} x_i + b \sum_{i \in I} y_i$$

- L'égalité lue de la gauche vers la droite permet de découper une somme en deux sommes et de « sortir » des facteurs qui ne dépendent pas de l'indice de sommation.
- L'égalité lue de la droite vers la gauche permet de regrouper plusieurs sommes en une seule.

Attention ! à ne pas inventer de pseudo-règles. Par exemple, les quantités suivantes

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \times b_i \qquad \left(\sum_{i=1}^{n} a_i \right) \times \left(\sum_{i=1}^{n} b_i \right)$$

n'ont aucune raison d'être toujours égales.

Changement d'indice dans une somme

Une somme peut se récrire en opérant un *changement* d'indice. La plupart du temps, c'est un simple *décalage* des indices. Voici un exemple typique d'utilisation. Cherchons à calculer :

$$S = \sum_{i=11}^{50} i^2$$

Soit le nouvel indice $j = i - 10$. Alors,

- lorsque $i = 11$ on a $j = 1$,
- lorsque $i = 50$ on a $j = 40$

et comme $i = j + 10$, la somme se récrit

$$S = \sum_{i=11}^{50} i^2 = \sum_{j=1}^{40} (j + 10)^2$$

(noter le changement d'indice) ce qui permettrait assez facilement de terminer le calcul de la somme.
En pratique, les changement d'indices sont de deux formes :

- une translation, comme $j = i + 2$
- une symétrie, comme $j = -i + 2$

Pour réaliser dans les faits un changement d'indice, on traduit tout ce qui dépend de l'ancien indice (disons i) dans le nouvel indice (disons j). Ce changement s'opère dans les TROIS endroits suivants de la somme :

— la borne en i du bas
— la borne en i du haut
— la quantité à sommer (qui dépend de i).

Notion de télescopage

Un télescopage dans une somme est une situation où une somme, une fois déployée, fait apparaître des termes qui se détruisent deux à deux (ils se télescopent).
Par exemple, calculons la somme des n premiers entiers impairs :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n}(2k-1)$$

On remarque que

$$k^2 - (k-1)^2 = k^2 - (k^2 - 2k + 1) = 2k - 1$$

et cette remarque est à la base du télescopage. Nous allons écrire les uns en-dessous des autres les termes de la somme

$$S_n = 1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-3) + (2n-1)$$

en utilisant $2k - 1 = k^2 - (k-1)^2$. On remplace donc k par successivement 1, 2, ..., $n-1$ et n pour obtenir :

$$\begin{aligned}
2 \times 1 - 1 &= 1^2 - 0^2 \\
2 \times 2 - 1 &= 2^2 - 1^2 \\
2 \times 3 - 1 &= 3^2 - 2^2 \\
&\cdots\cdots \\
2 \times (n-1) - 1 &= (n-1)^2 - (n-2)^2 \\
2 \times n - 1 &= n^2 - (n-1)^2
\end{aligned}$$

En additionnant ces égalités, on observe que :

— le membre de gauche est précisément la somme S_n ;
— dans le membre de droite, presque tous les termes entrent en collision deux à deux, puisque 1^2 et -1^2 s'éliminent, de même que 2^2 et -2^2, etc.

On obtient donc

$$S_n = 1^2 - 0^2 + 2^2 - 1^2 + \cdots + (n-1)^2 - (n-2)^2 + n^2 - (n-1)^2 = n^2 - 0^2 = n^2$$

Ainsi $\sum_{i=1}^{n}(2k-1) = n^2$. Au passage, on vérifie la justesse du résultat, par exemple, pour $n = 3$:

$$S_3 = 1 + 3 + 5 = 9 = 3^2$$

Le principe du télescopage

Pour produire un télescopage dans le calcul d'une somme $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$, il suffit de pouvoir décomposer le terme à sommer de la manière suivante

$$u_k = v_k - v_{k-1}$$

où (v_k) est une suite inconnue. Dans l'exemple ci-dessus, on avait :

$$u_k = 2k - 1 \qquad v_k = k^2$$

Si on déploie la somme S_n, on se rend compte que presque tous les termes se détruisent deux à deux :

$$\begin{array}{rcl} S_n & = & u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_{n-1} + u_n \\ & = & u_0 + (v_1 - v_0) + (v_2 - v_1) + \cdots + (v_{n-1} - v_{n-2}) + (v_n - v_{n-1}) \\ & = & u_0 - v_0 + v_n \end{array}$$

Naturellement, une somme donnée n'a, a priori, aucune raison de pouvoir se simplifier par télescopage.

4 Sommes multiples

Sommes emboîtées

Soit par exemple à calculer la somme suivante :

$$\begin{aligned} S =& 1+ \\ & 1+2+ \\ & 1+2+3+ \\ & \ldots \\ & 1+2+\cdots+9+10 \end{aligned}$$

On effectue une somme dont les termes sont eux-mêmes une somme. Le k-ème terme de la somme S est la somme $S_k = \sum_{j=1}^{k} j$ et donc :

$$S = \sum_{k=1}^{10} S_k = \sum_{k=1}^{10} \sum_{j=1}^{k} j$$

On a obtenu une somme emboîtée (je dirai aussi *double somme*).

Théorème de Fubini

Considérons une suite réelle $a_{i,j}$ qui dépend deux indices i et j, par exemple $10i+j$ et où l'indice i varie entre, par exemple, 1 et n et l'indice j entre 1 et p. Alors, le théorème de Fubini dit que

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p} a_{i,j} = \sum_{j=1}^{p}\sum_{i=1}^{n} a_{i,j}$$

autrement dit, on peut intervertir l'ordre des sommations.
La grille ci-dessous

$a_{1,1}$	$a_{1,2}$	$a_{1,3}$	$\cdots$	$a_{1,p}$
$a_{2,1}$	$a_{2,2}$	$a_{2,3}$	$\cdots$	$a_{2,p}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$a_{n-1,1}$	$a_{n-1,2}$	$a_{n-1,3}$	$\cdots$	$a_{n-1,p}$
$a_{n,1}$	$a_{n,2}$	$a_{n,3}$	$\cdots$	$a_{n,p}$

explique pourquoi on peut faire cette interversion. Dans ce tableau, on a placé à la ligne i et à la colonne j le terme $a_{i,j}$. Pour chaque $i \in \{1, \ldots, n\}$, la somme $\sum\limits_{j=1}^{p} a_{i,j}$ est la somme de tous les termes de la ligne d'indice i. Et donc $\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{p} a_{i,j}$ représente finalement la somme de tous les éléments de la grille.
De même, pour chaque $j \in \{1, \ldots, p\}$, la somme $\sum\limits_{i=1}^{n} a_{i,j}$ est la somme de tous les termes de la colonne d'indice j. Et donc $\sum\limits_{j=1}^{p}\sum\limits_{i=1}^{n} a_{i,j}$ représente aussi la somme de tous les éléments du tableau, d'où l'égalité du théorème.

Interversion plus générale

Soit la somme

$$S = \sum_{k=1}^{10}\sum_{j=1}^{k} j$$

que l'on peut déployer en

$$(\star) \qquad \begin{aligned} S =& 1+ \\ & 1+2+ \\ & 1+2+3+ \\ & \ldots \\ & 1+2+\cdots+9+10 \end{aligned}$$

Tous calculs faits, on obtient que $S = 220$.
Cela n'aurait pas de sens d'appliquer le théorème de Fubini car l'interversion donnerait

$$S = \sum_{j=1}^{k}\sum_{k=1}^{10} j$$

et la somme dépendrait d'un mystérieux indice k.

Toutefois, on peut encore appliquer une interversion des signes somme. En effet, visualisons la somme à calculer à partir du déploiement triangulaire $(\star)$ que je rappelle ci-après :

$$(\star) \qquad \begin{aligned} S =\, & 1+ \\ & 1+2+ \\ & 1+2+3+ \\ & \dots \\ & 1+2+\cdots+9+10 \end{aligned}$$

A priori, obtenir S revient à calculer d'abord des sommes suivants les lignes puis à additionner les sommes obtenues. Mais vue la forme des colonnes dans le triangle (les colonnes sont constantes), il est avantageux de faire une somme suivant les colonnes. Dans la colonne d'indice j, il y a $11-j$ valeurs toutes égales à j en sorte que

$$S = \sum_{j=1}^{10} (11-j)j$$

En appliquant la linéarité de la somme et les formules classiques, on peut facilement calculer S :

$$\begin{aligned} S &= \sum_{j=1}^{10} (11-j)j \\ &= 11\sum_{j=1}^{10} j - \sum_{j=1}^{10} j^2 \\ &= 11 \times 10 \times 11/2 - 10 \times 11 \times 21/6 \\ &= 605 - 385 \\ &= 220 \end{aligned}$$

Alternative purement formelle

Il n'est pas nécessaire de déployer la somme et de faire une lecture en ligne ou en colonne. En effet, une somme double peut toujours se récrire en une somme simple :

$$\begin{aligned} S &= \sum_{k=1}^{10} \sum_{j=1}^{k} j \\ &= \sum_{\substack{1\leq k\leq 10 \\ 1\leq j\leq k}} j \end{aligned}$$

La dernière somme se fait sur un ensemble de couples. Pour intervertir les symboles, il suffit de parvenir à récrire l'ensemble des couples en faisant varier j entre deux bornes fixes. Or, on a l'équivalence facile suivante :

$$\left.\begin{matrix} 1 \leq k \leq 10 \\ 1 \leq j \leq k \end{matrix}\right\} \iff \left\{\begin{matrix} 1 \leq j \leq 10 \\ j \leq k \leq 10 \end{matrix}\right.$$

Par suite, on peut transformer la somme simple en double somme avec échange des indices :

$$\begin{aligned} S &= \sum_{\substack{1\leq k\leq 10\\ 1\leq j\leq k}} j \\ &= \sum_{\substack{1\leq j\leq 10\\ j\leq k\leq 10}} j \\ &= \sum_{j=1}^{10}\sum_{k=j}^{10} j \end{aligned}$$

Or, $\sum\limits_{k=j}^{10} j = (10-j+1)j$ car on somme une quantité constante et donc $S = \sum\limits_{j=1}^{10}(11-j)j$ et on retrouve le calcul fait visuellement plus haut.

5 Sommes et programmation

Calculer des sommes en Python

Quand on programme, on est souvent amené à calculer des sommes. Par exemple, soit à calculer une valeur approchée de la somme

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$$

pour $n = 1000$.

Voici un code en Python 3 :

```
1 n=1000
2 S=0
3
4 for k in range(1,n+1):
5     S=S+1/k**2
6
7 print(S)
```

qui affiche

```
1.6439345666815612
```

Le principe est le suivant :

— On initialise à 0 une variable accumulatrice `S`

— La somme est calculée à l'issue d'une boucle `for`

— A chaque étape de la boucle, `S` est augmentée du terme courant de la somme.

Il est courant d'abréger la ligne 5 du code ci-dessus par `S+=1/k**2`.

Fonction built-in

Python dispose d'une fonction native de calcul de somme et qui évite d'écrire une boucle `for` :

```
n=1000
S=sum(1/k**2 for k in range(1,n+1))

print(S)
```

Sommes multiples

Pour calculer une somme multiple, il suffit d'emboîter des boucle `for` de parcours d'indices. Par exemple, calculons

$$S = \sum_{k=1}^{10} \sum_{j=1}^{k} j$$

```
S=0
n=10

for k in range(1,n+1):
    for j in range(1, k+1):
        S=S+j

print(S)
```

```
220
```

On peut aussi utiliser la fonction `sum` :

```
n=10

S=sum(sum(j for j in range(1,k+1)) for k in range(1, n+1))

print(S)
```

```
220
```

Calcul de sommes formelles avec SageMath

SageMath permet de calculer assez facilement certaines sommes **formelles**, y compris des sommes emboîtées. Voici trois exemples.

1er exemple

Calcul de la somme $A_n = \sum_{k=1}^{n} 2^k 3^{n-k}$

```
var("k n")
S=sum(2^k*3^(n-k), k, 1, n)
show(S)
```

qui affiche $2 \cdot 3^n - 2^{n+1}$.

2ᵉ exemple

Calcul de la somme $B_n = \sum_{j=3}^{n} \sum_{k=j}^{j+3} (10j + k)$

```
var("j k n")
S=sum(sum(10*j+k, k, j, j+3), j, 3, n)
show(S)
```

qui affiche $22\,n^2 + 28\,n - 144$.

3ᵉ exemple

Calcul de la somme $C_n = \sum_{j=0}^{n} (j+1)(j+2)\binom{n}{k}$

```
var("k n")
show(sum((k+1)*(k+2)*binomial(n,k),k, 0,n))
```

qui affiche $\left(n^2 + 7\,n + 8\right)2^{n-2}$.
Toutefois, SageMath ne semble pas capable de simplifier des sommes telles que

$$\sum_{k=0}^{q} \binom{p}{k}\binom{q}{q-k} = \binom{p+q}{q}$$

6 En vrac ...

Importance des sommes en mathématiques

Les sommes sont omniprésentes en mathématiques, elles interviennent massivement dans les questions ou les domaines suivants :

- calcul intégral
- probabilités, statistiques
- calcul matriciel
- calcul polynomial
- espaces munis d'un produit scalaire
- séries numériques.

Ainsi, l'écriture d'un entier N en base 10, ayant n chiffres, disons :

$$c_0, c_1, \ldots, c_{n-2}, c_{n-1}$$

(en commençant par le chiffres des unités), n'est autre que la somme suivante :

$$N = \sum_{k=0}^{n-1} c_k 10^k$$

Somme vide

On convient qu'une somme sur un ensemble vide d'indices vaut 0.

i indice et $\imath$ complexe

Si vous sommez des nombres complexes, évitez d'utiliser la lettre i comme indice de somme puisqu'elle pourrait entrer en collision avec le nombre complexe $\imath$ tel que $\imath^2 = -1$ (écrit convenablement en $\LaTeX$, les deux symboles sont néanmoins bien distincts).

Indice muet et double somme

Cette section pourra être réservée à une deuxième lecture. Elle a seulement pour but de consolider la compréhension de l'indice dans une somme.

Un entier $n \geq 1$ étant donné, considérons à nouveau la somme

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} k = 1 + 2 + \cdots + n$$

La lettre k est muette et la valeur de cette somme ne dépend que de n. On peut donc envisager de sommer une quantité qui dépendrait de S_n, par exemple $\dfrac{S_n}{n+1}$:

$$T = \sum_{n=1}^{10} \frac{S_n}{n+1}$$

On peut même écrire :

$$T = \sum_{n=1}^{10} \frac{1}{n+1} S_n = \sum_{n=1}^{10} \left(\frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^{n} k \right)$$

Attention, cette fois, la somme T est une constante et ne dépend ni de k ni de n qui devient, à son tour, une lettre muette.

Pour étendre légèrement ce qui précède, considérons $m \geq 1$ un entier et introduisons la somme

$$T_m = \sum_{n=1}^{m} \frac{S_n}{n+1}$$

Calculons cette somme. Pour cela, on a besoin de la formule suivante :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

Cette formule nous permet de calculer facilement T_m, il suffit de remplacer :

$$
\begin{aligned}
T_m &= \sum_{n=1}^{m} \frac{1}{n+1} S_n \\
&= \sum_{n=1}^{m} \frac{1}{n+1} \left(\frac{n(n+1)}{2} \right) \\
&= \sum_{n=1}^{m} \frac{n}{2} \\
&= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{m} n \\
&= \frac{1}{2} \times \frac{m(m+1)}{2} \\
&= \frac{m(m+1)}{4}
\end{aligned}
$$

Pour se rassurer, vérifions avec $m = 1$:

- par hypothèse, $T_1 = \sum_{n=1}^{m} \frac{S_n}{n+1} = \frac{S_1}{2} = \frac{1}{2}$
- notre calcul donne $T_1 = \frac{1 \times (1+1)}{4} = \frac{1}{2}$

Télescopage sans déploiement

Il est possible de mettre en œuvre un télescopage sans déployer la somme ie écrire toutes les égalités les unes et dessous des autres (ou à côté des autres) et procéder à l'élimination deux à deux. Pour cela il suffit de faire un décalage d'indice.

Je reprends le calcul de $S_n = \sum_{i=1}^{n} (2k-1)$ utilisant que $2k - 1 = k^2 - (k-1)^2$. On a

$$
\begin{aligned}
S_n &= \sum_{k=1}^{n} (2k-1) \\
&= \sum_{k=1}^{n} (k^2 - (k-1)^2) \\
&= \sum_{k=1}^{n} k^2 - \sum_{k=1}^{n} (k-1)^2 \\
&= \sum_{k=1}^{n} k^2 - \sum_{j=0}^{n-1} j^2 \qquad (\star) \\
&= \sum_{k=1}^{n} k^2 - \sum_{k=0}^{n-1} k^2 \\
&= \sum_{k=1}^{n-1} k^2 + n^2 - 0^2 + \sum_{k=1}^{n-1} k^2 \qquad (\star\star) \\
&= n^2 - 0^2 \\
&= n^2
\end{aligned}
$$

J'ai calculé $\sum\limits_{k=1}^{n}(k-1)^2$ en faisant (cf. ($\star$)) le décalage d'indice $j = k - 1$. Ensuite, il faut faire apparaître les parties communes dans les deux sommes (cf. ($\star\star$)) ce qui permet l'élimination de la somme.

Homogénéiser par décalage d'indice

On peut utiliser un décalage d'indice pour regrouper des monômes. Par exemple, soit l'expression polynomiale :

$$P(x) = \sum_{k=0}^{10}((k-2)x^{k+1} + 5x^k)$$

Par linéarité et décalage d'indice, on peut faire apparaître les coefficients du polynôme. D'abord la linéarité :

$$\begin{aligned} P(x) &= \sum_{k=0}^{10}((k-2)x^{k+1} + 5x^k) \\ &= \sum_{k=0}^{10}(k-2)x^{k+1} + \sum_{k=0}^{10} 5x^k \end{aligned}$$

On effectue

- le changement d'indice $j = k + 1$ dans la première somme
- le changement d'indice $j = k$ dans la deuxième

tout ceci dans le but que tous les monômes visibles soient en x^j (et aient donc **le même** exposant j) :

$$P(x) = \sum_{j=1}^{11}(j-3)x^j + \sum_{j=0}^{10} 5x^j$$

puis on isole les indices communs pour rassembler les deux sommes :

$$P(x) = \sum_{j=1}^{10}(j-3)x^j + 8x^{11} + 5 + \sum_{j=1}^{10} 5x^j = 5 + \sum_{j=1}^{10}(j+2)x^j + 8x^{11}$$

ce qui permet de connaître, par simple lecture, les coefficients de $P(x)$. Par exemple, le coefficient de $x^j = x^5$ vaut $j + 5 = 7$.

Réduction après changement d'indice

Un changement d'indice permet parfois de calculer explicitement une somme. Soit à calculer $S_n = \sum\limits_{i=0}^{n} i$. On fait le changement d'indice $j = n - i$. Lorsque $i = 0$ on a $j = n$ et lorsque $i = n$ on a $j = 0$ donc, comme $i = n - j$ on a

$$S_n = \sum_{i=0}^{n} i = \sum_{j=0}^{n} (n-j) = \sum_{j=0}^{n} (n-j)$$

[j'ai évité d'écrire la somme comme $\sum_{j=n}^{0} (n-j)$ car il n'est pas courant que l'indice en haut soit inférieur à l'indice en bas, on pourrait interpréter une telle somme comme une somme vide] puis, par linéarité

$$S_n = \sum_{j=0}^{n} n - \sum_{j=0}^{n} j = n(n+1) - S_n$$

Ainsi, $S_n = n(n+1) - S_n$ d'où $2S_n = n(n+1)$ puis $S_n = n(n+1)/2$.

Comme $\sum\limits_{i=0}^{n} i = S_n = \sum\limits_{i=1}^{n} i$, on a retrouvé que $\sum\limits_{i=1}^{n} i = n(n+1)/2$

EXERCICES

1. Traduire avec sigma

Exprimer à l'aide du symbole Σ la quantité suivante

$$\frac{x_1}{x_n} + \frac{x_2}{x_{n-1}} + \ldots + \frac{x_{n-1}}{x_2} + \frac{x_n}{x_1}$$

2. Traduire avec le symbole sigma

Ecrire à l'aide du symbole Σ la somme $S_n = n + (n+1) + (n+2) + \cdots + (2n-1) + 2n$ (deux réponses sont possibles).

3. Ecrire une somme dans le triangle de Pascal

Le triangle de Pascal possède la propriété suivante : si on additionne tous les éléments situés dans une même colonne au-dessus d'une valeur donnée V dans le tableau, on obtient le nombre situé immédiatement en bas à droite de V Par exemple, dans la figure ci-dessous,

1										
1	1									
1	2	1								
1	3	3	1							
1	4	6	4	1						
1	5	10	10	5	1					
+ 1	6	15	20	15	6	1				
1	7	21	35	35	21	7	1			
1	8	28	56	70	56	28	8	1		
1	9	36	84	126	126	84	36	9	1	
1	10	45	+ 120	210	252	210	120	45	10	1

la somme des nombres dans chaque rectangle vaut le nombre cerclé situé en contrebas de la colonne.

Traduire la propriété générale ci-dessus en utilisant le symbole sigma et des coefficients binomiaux. On ne demande pas de démontrer l'égalité obtenue.

4. Calculer la valeur d'une somme alternée

Pour cet exercice, il n'est pas attendu d'utiliser une formule remarquable mais simplement d'appliquer la définition d'une somme.
Calculer en fonction de n la somme suivante :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k$$

5. Calculs de sommes alternées

① Calculer en fonction de n la somme suivante :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{2021k+81}$$

② Même question pour la somme

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{k^2}$$

6. Somme d'entiers se terminant par 7

La somme des 5 premiers entiers se terminant par 7 est $7 + 17 + 27 + 37 + 47 = 135$. Plus généralement, exprimer à l'aide du symbole sigma la somme S_n des n premiers entiers se terminant par 7 puis calculer S_n. On observera qu'un entier se terminant par 7 est de la forme $10k + 7$ avec $k \geq 0$ entier.

7. Linéarité, visuel

Soit $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (2k + 1)$.

① Calculer S_n en utilisant la linéarité.
② Retrouver le résultat par une preuve visuelle (*aide* : remplir un carré de côté n par des bandes en forme d'équerres).

8. Somme d'une expression constante

Soit $n \in \mathbb{N}$.

① ⓐ Calculer $A_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} 81$.

ⓑ Calculer $A = \displaystyle\sum_{n=1}^{5} A_n$.

② Calculer $C_n = \displaystyle\sum_{i=-n}^{n+2} (3n + 2)$.

9. Somme des minimums

Si a et b sont deux réels, la notation $\min(a,b)$ désigne le plus petit des deux réels a et b. Soit $n \in \mathbb{N}$ et soit la somme suivante :

$$S_n = \sum_{k=n}^{3n} \min(k, 2n).$$

① Calculer S_0, S_1 et S_2.

② ⓐ Calculer $A_n = \sum_{k=2n+1}^{3n} (2n)$ (*indication* : on trouvera $A_n = 2n^2$).

ⓑ Calculer $B_n = \sum_{k=n}^{2n} k$ (*indication* : on pourra utiliser un changement d'indice ; on trouvera $B_n = 3n(n+1)/2$).

③ ⓐ En déduire l'expression explicite de S_n (*indication* : découper la somme S_n suivant que l'indice k vérifie ou pas $k \geq 2n$; on trouvera $H_n = n(7n+3)/2$).

ⓑ Vérifier la justesse de votre résultat en recalculant S_0, S_1 et S_2.

10. Géométrique et arithmétique

Calculer la somme $S_n = \sum_{k=n}^{2n} (2^k - 2k)$.

11. Somme de produits de puissances

Soit n un entier positif. Soit la somme suivante :

$$S(n) = 2 \times 3^{n-1} + 2^2 \times 3^{n-2} + \cdots + 2^{n-1} \times 3 + 2^n.$$

① Exprimer $S(n)$ à l'aide du symbole Σ.

② Expliciter $S(n)$ en calculant d'abord $\dfrac{S(n)}{3^n}$.

12. Somme géométrique

Soit

$$S = \frac{1}{2^{10}} + \frac{1}{2^{20}} + \frac{1}{2^{30}} + \cdots + \frac{1}{2^{1000}}$$

(les exposants vont de 10 en 10).

① Exprimer S à l'aide du symbole Σ.

② Calculer S (On trouvera $S = \dfrac{2^{1000} - 1}{2^{1000}(2^{10} - 1)}$).

13. Sommes géométriques diverses

Calculer les sommes suivantes.

① $A_n = \sum_{i=1}^{n} (-1)^i$

(2) $B_n = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{3i+1}$

(3) $C_n = \sum_{i=-n}^{n} 10^{3i}$

14. Simplifier une somme alternée

Simplifier l'expression $x^5 - x^{10} + x^{15} - \cdots \pm x^{2020}$ (*explication* : on compte de 5 en 5 en alternant les signes et le signe final $\pm$ est donc à déterminer).

15. Somme de répunits

Soit u_k l'entier ayant, en base dix, k chiffres valant tous 1. Par exemple, u_3 vaut cent-onze. Ces nombres sont dits des répunits.

(1) On observe que, par exemple, $111 = 1 + 10 + 100$. Plus généralement, écrire u_k, à l'aide du symbole sigma, comme une somme de puissances de 10.

(2) Vérifier que $u_k = \dfrac{10^k - 1}{9}$.

(3) En déduire une formule donnant $\sum_{k=1}^{n} u_k$.

16. Somme de puissances bizarres

Calculer la somme $\sum_{k=1}^{2n} k^{(-1)^k}$.

17. Somme des carrés de 3 en 3

Soit $S = 1^2 + 4^2 + \cdots + 100^2$ (les termes vont de 3 en 3).

(1) Exprimer S à l'aide du symbole Σ.

(2) Montrer que la valeur exacte de S est 116161.

18. Indices négatifs

(1) Calculer la somme $A_n = \sum_{k=-n}^{n} (k+2)$.

(2) Calculer la somme $B_n = \sum_{k=-n}^{n} k^2$.

19. Somme d'une expression constante avec indices négatifs

Soit $n \in \mathbb{N}$.

(1) Calculer $B_n = \sum_{k=-n}^{n} n$.

(2) Calculer $B = \sum_{n=1}^{5} \left(\sum_{k=-n}^{n} n \right)$.

20. Identité remarquable

On donne $S = \sum_{j=1}^{42} j^2 = 25585$ et on n'est pas censé connaître $T = \sum_{j=1}^{42} j$.

(1) Trouver la valeur de la somme $U = \sum_{j=1}^{42}(j^2 - 2j + 1)$.

(2) En déduire la valeur de T.

21. Somme tronquée d'entiers consécutifs

Calculer la somme $S_n = n + (n+1) + (n+2) + \cdots + (2n-1) + 2n$.

22. Regroupement dans une somme alternée d'entiers consécutifs

Pour $N \in \mathbb{N}$, on définit la somme

$$S_N = \sum_{k=1}^{N} (-1)^{k+1} k$$

Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer explicitement S_{2n} en regroupant les termes de la somme suivant leur signe. Calculer ensuite S_{2n+1}.

23. Somme alternée

Soit $n > 0$ un entier. Soit la somme

$$S_n = n - (n-1) + (n-2) - (n-3) + \cdots \quad 1.$$

Explication : partant de n, on alterne soustraction et addition jusqu'à ce que l'élément additionné ou soustrait soit 1. Ainsi, par exemple, $S_4 = 4 - 3 + 2 - 1$.

(1) Ecrire à l'aide du symbole Σ l'expression S_n.

(2) Montrer que $S_n = n/2$ si n est pair et $S_n = (n+1)/2$ si n est impair.

24. Somme alternée d'entiers consécutifs

Soit la suite $(S_n)_{n \geq 1}$ dont voici les 5 premiers termes :

$$S_1 = 1, \quad S_2 = 1 - 2, \quad S_3 = 1 - 2 + 3, \quad S_4 = 1 - 2 + 3 - 4, \quad S_5 = 1 - 2 + 3 - 4 + 5$$

la règle générale étant que, dans l'expression formelle de S_n, on sépare les entiers entre 1 et n par, alternativement, le signe $-$ et le signe $+$.

Les trois questions sont indépendantes.

(1) (a) Exprimer S_n à l'aide du symbole sigma.

(b) Calculer la valeur de S_{2N+1} où N est un entier donné. On pourra utiliser la formule suivante :

$$\sum_{k=1}^{N} (2k-1) = N^2$$

(c) D'une façon générale, montrer que $S_n = (-1)^{n+1}E\left(\dfrac{n+1}{2}\right)$ où E désigne la partie entière.

(2) (a) Donner l'expression formelle de S_6.

(b) En examinant les valeurs des 6 premiers termes de la suite $(S_n)_{n\geq 1}$, conjecturer la valeur de S_n en fonction n et, en particulier, conjecturer la valeur de S_{2021}.

25. Somme alternée de cubes

On pose $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3$ ainsi que $T_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}(-1)^k k^3$.

(1) Écrire T_5 sans le symbole Σ puis calculer T_5.

(2) On pose $A = \sum_{k=1}^{50}(2k)^3$ et $B = \sum_{k=0}^{49}(2k+1)^3$.

(a) Montrer que $B = S_{100} - A$.

(b) Calculer la valeur de A.

(3) Exprimer T_{100} en fonction A et S_{100} puis en déduire la valeur de T_{100}.

26. Somme d'un produit

Etablir que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k(n-k) = \frac{n^3-n}{6}$.

27. Appliquer la formule du binôme

Utiliser la formule du binôme pour obtenir que $101^5 = 10510100501$.

28. Formule du binôme : développer et simplifier

(1) Simplifier $\dfrac{(a-1)^5+1}{a} - 5$.

(2) En déduire que $999^5 + 1 = 995009990005000$

29. Développer par la formule du binôme

Vérifier que $(-2x+5)^5 = -32x^5 + 400x^4 - 2000x^3 + 5000x^2 - 6250x + 3125$

30. Formule du binôme : extraire un terme

(1) Quel est le coefficient de x^{24} dans le polynôme $P(x) = (\sqrt{2} - 10x^3)^{10}$? On trouvera 9 milliards.

(2) Quel est le coefficient de x^9 dans l'expression $E = (2x-5)^{12}$? On trouvera -14080000.

31. Inégalité via la formule du binôme

Montrer en utilisant la formule du binôme que si $n \in \mathbb{N}$ et $x \geq 0$ alors

$$(1+x)^n \geq 1 + nx$$

32. Coefficient binomial maximal

Montrer que la suite des coefficients binomiaux $b_k = \binom{2020}{k}$ où $k \in \{0, 1, \ldots, 2020\}$ est croissante puis décroissante et en déterminer la plus grande valeur.

Pour cela, on calculera le quotient $\frac{b_{k+1}}{b_k}$.

33. Formule du trinôme

Soit $P = (x^2 + x + 1)^{17}$.
Montrer que le coefficient de x^5 dans l'expression développée de P est

$$c = \binom{17}{3} \times \binom{3}{2} + \binom{17}{4} \times \binom{4}{1} + \binom{17}{5} \times \binom{5}{0} = 17748.$$

Pour cela, on appliquera la formule du binôme à $P = (a + b)^{17}$ en posant $a = x^2 + x$ et $b = 1$.

34. Terme maximal

On développe par la formule du binôme la somme $(42 + 81)^{100}$. Donner la valeur du plus grand terme de la somme.
[*Inspiré d'un exercice de Jean-Michel Ferrard sur* www.mathprepa.fr]

35. Somme de coefficients binomiaux calculée géométriquement

Soit à calculer

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k}.$$

(1) Visualiser suivant un triangle la somme S_n. L'entier $k\binom{n}{k}$ sera vu comme le placement en colonne de k entiers valant $\binom{n}{k}$.

(2) En complétant le triangle en un carré et en utilisant que

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$$

montrer que $S_n = n 2^{n-1}$.

36. Somme comportant des coefficients binomiaux

Soit à calculer

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} k^2 \binom{n}{k}.$$

(1) Montrer que si $1 \leq k \leq n$ alors $\binom{n}{k} = \frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1}$.

(2) En utilisant la question précédente ainsi que $\sum_{k=0}^{m} k\binom{m}{k} = m2^{m-1}$, montrer que $S_n = n(n+1)2^{n-2}$.

37. Somme de carrés

Montrer que

$$\sum_{k=n}^{2n} k^2 = \frac{1}{6}(14n+1)(n+1)n$$

38. Somme de produits de trois entiers consécutifs

On veut montrer que

$$S_n := \sum_{k=1}^{n} k(k-1)(k-2) = \frac{(n+1)n(n-1)(n-2)}{4}$$

On pose

$$T_n := \sum_{k=1}^{n} k(k-1)(k-2)(k-3)$$

(1) Transformer T_n en remarquant que

$$k(k-1)(k-2)(k-3) = k(k-1)(k-2)(k+1-4) = (k+1)k(k-1)(k-2) - 4k(k-1)(k-2)$$

(2) Transformer encore en décalant d'indice par $j = k+1$

(3) Faire apparaître T_n et S_n dans l'expression transformée et en déduire le résultat demandé.

(4) Soit $p \geq 1$. Généraliser ce qui précède au calcul de $\sum_{k=1}^{n} k(k-1)(k-2)\ldots(k-p+1)$.

39. Somme de coefficients binomiaux et réindexation

En utilisant que

$$\sum_{k=0}^{N} \binom{N}{k} = 2^N$$

et en réindexant, établir, pour $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$, la somme

$$\sum_{k=1}^{n-1} \binom{n+1}{k+1} = 2^{n+1} - n - 3$$

40. Télescopage avec factorielles

On rappelle que *factorielle* de l'entier $n > 0$ est le nombre $n! = 1 \times 2 \times \cdots \times n$.

On se propose de démontrer que

$$\sum_{k=1}^{n} k! \times k = (n+1)! - 1$$

On posera $S_n = \sum_{k=1}^{n} k! \times k$.

1. Vérifier cette formule pour $n = 4$.
2. En écrivant $k = (k+1) - 1$, montrer que $S_n = \sum_{k=1}^{n} (k+1)! - \sum_{k=1}^{n} k!$.
3. En déduire, en effectuant de préférence un changement d'indice, le résultat annoncé.

41. Sommes des termes de la suite de Fibonacci

Soit la suite de Fibonacci $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$F_0 = 0,\ F_1 = 1,\ F_{n+2} = F_{n+1} + F_n.$$

Les 13 premiers termes de la suite sont :

$$0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144$$

Montrer, par télescopage, que

$$\sum_{k=0}^{n} F_k = F_{n+2} - 1$$

42. Suite de Fibonacci

Soit la suite de Fibonacci $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$F_0 = 0,\ F_1 = 1,\ F_{n+2} = F_{n+1} + F_n.$$

Les 13 premiers termes de la suite sont :

$$0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144$$

1. Calculer

   $$\frac{F_{k+3}}{2^k} - \frac{F_{k+2}}{2^{k-1}}$$

   en fonction de F_k
2. En déduire, par télescopage, que

   $$\sum_{k=0}^{n} \frac{F_k}{2^k} = 2 - \frac{F_{n+3}}{2^n}$$

43. Télescopage pour $k2^k$

Soit $a_k = 2^k(k-2)$. Calculer $a_{k+1} - a_k$ et, en déduire, par télescopage, la valeur de la somme

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} k2^k$$

On trouvera que $S_n = 2^{n+1}(n-1) + 2$.

44. Télescopage dans le tableau de Pascal

Le triangle de Pascal possède la propriété suivante : si on additionne les i premiers éléments situés dans la j^{e} colonne du triangle, on obtient le terme en $(i+1)^{\text{e}}$ position dans la $(j+1)^{\text{e}}$ colonne. Ainsi, dans la figure ci-dessous :

1										
1	1									
1	2	1								
1	3	3	1							
1	4	6	4	1						
1	5	10	10	5	1					
1	6	15	20	15	6	1				
1	7	21	35	35	21	7	1			
1	8	28	56	70	56	28	8	1		
1	9	36	84	126	126	84	36	9	1	
1	10	45	120	210	252	210	120	45	10	1

la somme des nombres dans chaque rectangle vaut le nombre cerclé situé en contrebas de la colonne. Ainsi,

$$1 + 4 + 10 + 20 + 35 + 56 + 84 = 210$$

1. Traduire la propriété générale ci-dessus en utilisant le symbole sigma, l'entier n, l'entier p (supposés fixés) et des coefficients binomiaux.
2. Démontrer l'égalité obtenue (*aide* : on utilisera la formule $\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$).

45. Télescopage de racines carrées

Calculer la somme

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k} + \sqrt{k+1}}$$

Pour cela, on supprimera les radicaux du dénominateur en multipliant par sa partie conjuguée.

46. Télescopages de fractions

Calculer les sommes ci-dessous. Dans chaque cas, on pourra essayer

— la méthode avec déploiement

— la méthode sans déploiement et utilisant un décalage d'indice.

1) Calculer la somme $\displaystyle\sum_{k=1}^{N}\left(\frac{1}{2k}-\frac{1}{k+1}+\frac{1}{2(k+2)}\right)$.

2) Calculer la somme $\displaystyle\sum_{k=1}^{N}\left(\frac{5}{3k}-\frac{2}{k+1}+\frac{1}{3(k+3)}\right)$.

47. Somme double par déploiement

Calculer la somme suivante

$$\sum_{j=3}^{n}\sum_{k=j}^{j+3}(10j+k)$$

48. Somme double

Soit la somme $\displaystyle S_n=\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{k-1}\frac{i}{k}$.

1) Calculer S_4.
2) Calculer S_n.

49. Somme harmonique et somme double

On note $\displaystyle H_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$. Soit la somme

$$S=\sum_{i=1}^{15}\sum_{k=15}^{30}\frac{1}{ki}$$

Calculer S en fonction de H_n. On trouvera que $S=H_{15}(H_{30}-H_{14})$

50. Somme de minimums par deux méthodes

Soit la somme $\displaystyle S_n=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\min(i,j)$.

On veut prouver que $\displaystyle S_n=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

1) Calculer S_4.
2) a) Construire une grille donnant $\min(i,j)$ en fonction des entrées $i\in\{1,2,\dots,n\}$ et $j\in\{1,2,\dots,n\}$.

(b) En déduire le résultat, en observant les motifs en équerre apparaissant dans le tableau.

(3) (a) Soit un entier $i \geq 1$. Calculer $A_i = \sum_{j=1}^{i} j$.

(b) Soient des entiers n et i avec $1 \leq i \leq n$. Calculer $B_i = \sum_{j=i+1}^{n} i$.

(c) En écrivant que $\sum_{j=1}^{n} \min(i,j) = \sum_{j=1}^{i} \min(i,j) + \sum_{j=i+1}^{n} \min(i,j)$, en déduire le résultat annoncé.

51. Somme double nulle

Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit la somme

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} (k-i)$$

(1) Calculer S_2.

(2) Plus généralement, montrer, en utilisant le théorème de Fubini, que $S_n = 0$.

52. Interversion des signes somme

Soit la somme $S_n = \sum_{j=1}^{n} \left[(2j-1) \left(\sum_{k=j}^{n} \frac{1}{k} \right) \right]$

(1) Calculer S_3.

(2) Transformer S_n sous la forme $S_n = \sum_{j=?}^{?} \sum_{k=?}^{?} ?$ (compléter et justifier).

(3) Transformer S_n pour obtenir une expression de la forme $S_n = \sum_{k=?}^{?} \sum_{j=?}^{?} ?$ (compléter et justifier l'échange des symboles sigma).

(4) En déduire que $S_n = \frac{n(n+1)}{2}$.

53. Somme emboîtée par deux méthodes

On se propose de calculer de deux manières différentes la somme

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} k2^k.$$

Les questions 1, 2 et 3 sont indépendantes.

(1) Calculer S_5.

(2) On définit les polynômes $P(x) = \sum_{k=0}^{n} x^k$ et $Q(x) = xP'(x)$.

(a) Vérifier que $S_n = Q(2)$.

(b) Pour $x \neq 1$, transformer $P(x)$ puis en déduire un expression de $Q(x)$ sous forme de fraction.
(c) Montrer que $S_n = (n-1)2^{n+1} + 2$.
(d) Retrouver S_5.

(3) (a) En récrivant à l'aide du symbole sigma $k2^k$ comme une somme de termes valant 2^k, montrer que

$$S_n = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=j}^{n} 2^k$$

(b) Retrouver le résultat précédent en faisant une visualisation en deux dimensions de la somme S_n. Pour cela, on pensera $k2^k$ comme valant la somme de k termes suivante :

$$k2^k = 2^k + 2^k + \cdots + 2^k \quad (k \text{ termes})$$

(c) Calculer la somme $T(n,j) = \sum_{k=j}^{n} 2^k$ où $j \geq 0$ est un entier fixé.
(d) En déduire que

$$S_n = (n-1)2^{n+1} + 2.$$

54. Carré d'une somme

Vérifier que

$$\sum_{1 \leq i,j \leq n} x_i x_j = \left(\sum_{k=1}^{n} x_k \right)^2$$

55. Somme double calculée géométriquement

(1) Soit $n \in \mathbb{N}$. Dessiner les points (i,j) tels que

$$i,j \in \mathbb{N} \text{ et } i+j \leq n$$

(2) En déduire que $\sum\limits_{\substack{i,j \in \mathbb{N} \\ i+j \leq n}} i = \frac{(n+2)(n+1)n}{6}$.

56. Somme emboîtée

Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que :

$$\sum_{i=1}^{n-1} \sum_{k=i+1}^{n} (k-i) = \frac{n(n^2-1)}{6}$$

57. Somme double (tableau)

Soit la somme

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} j \, (-1)^{j + \frac{i}{2}\left((-1)^j + 1\right)}$$

Montrer que $S_n = \begin{cases} \dfrac{1}{4}\big(n^2 + 2\,n - 1\big)(n+1) & \text{si } n \text{ impair} \\ \dfrac{n^3}{4} & \text{si } n \text{ pair} \end{cases}$

Pour cela, on pourra placer dans un tableau indexé par i et j les nombres

$$a_{i,j} = j\,(-1)^{j + \frac{i}{2}}\Big((-1)^j + 1\Big)$$

et, pour calculer S_n, on discutera suivant la parité de n.

58. Somme harmonique

Pour $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ on pose $H_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

1. (*Cette question est indépendante de la suite*) On pose $\delta = H_{128} - H_{64}$. Écrire δ à l'aide d'un unique symbole $\sum$. Montrer que $\delta \geq \frac{1}{2}$.
2. Plus généralement, pour $n \geq 1$, on pose $d_n = H_{2n} - H_n$.
   - a. Une fois l'expression d_n réduite, on obtient une somme : combien de termes comporte cette somme ?
   - b. Montrer que $d_n \geq \frac{1}{2}$.
3. a. Montrer que $H_{2020} > H_{1024}$.
   - b. Exprimer $\displaystyle\sum_{k=0}^{9} d_{2^k}$ en fonction de H_{1024}.
   - c. En déduire que $H_{2020} > 6$

59. Somme de cosinus

Soit $t \in$ et $n \in \mathbb{N}$. Calculer

$$\sum_{k=0}^{n} \cos(2k+1)t$$

60. Somme de logarithmes

1. Soient les sommes $A_n = \displaystyle\sum_{k=2}^{n} \ln(k-1)$ et $B_n = \displaystyle\sum_{k=2}^{n} \ln(k+1)$. En utilisant de préférence un changement d'indice, écrire chacune des deux sommes sous la forme $\displaystyle\sum_{j=?}^{?} \ln j$ où les points d'interrogation seront à préciser.
2. Soit $C_n = \displaystyle\sum_{k=2}^{n} \ln k$. Déduire de la question précédente une expression aussi réduite que possible de $A_n + B_n - 2C_n$.
3. Simplifier l'expression $S_n = \displaystyle\sum_{k=2}^{n} \ln\left(1 - \frac{1}{k^2}\right)$.

61. Nombres triangulaires et pyramidaux

Exercice de programmation

— Un nombre entier T est dit *triangulaire* s'il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que $T = \sum_{k=1}^{m} k$. Par exemple, $55 = 1 + 2 + 3 + \cdots + 10$ est un entier pyramidal mais pas 42.

— Un nombre entier T est dit *carré pyramidal* (en abrégé, on dira *pyramidal*) s'il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que $T = \sum_{k=1}^{m} k^2$. Par exemple, $10 = 1 + 2 + 3 + 4$ est un entier pyramidal mais pas 42.

Il existe 4 entiers qui sont à la fois triangulaires et pyramidaux. Les trouver.